

قصه‌هایی دربارهٔ جدول ضرب

دومین قصه:

ضرب ضربداری



بهزاد اسلامی مسلم

مدت‌هاست که با جدول ضرب آشنا هستید. اما ممکن است به مسئله‌های جالبی که دربارهٔ همین جدول ظاهراً ساده وجود دارد، برخورد کرده باشید. در هر شماره از برهان امسال، با چنین مسئله‌هایی روبه‌رو می‌شوید. این دفعه، دربارهٔ حاصل ضرب بعضی از عددهای جدول ضرب صحبت می‌کنیم.

جدول زیر، همان جدول ضرب 10×10 است. به خانه‌هایی از این جدول که رنگی شده‌اند، توجه کنید.

×	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۲	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
۳	۳	۶	۹	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱	۲۴	۲۷	۳۰
۴	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸	۳۲	۳۶	۴۰
۵	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰
۶	۶	۱۲	۱۸	۲۴	۳۰	۳۶	۴۲	۴۸	۵۴	۶۰
۷	۷	۱۴	۲۱	۲۸	۳۵	۴۲	۴۹	۵۶	۶۳	۷۰
۸	۸	۱۶	۲۴	۳۲	۴۰	۴۸	۵۶	۶۴	۷۲	۸۰
۹	۹	۱۸	۲۷	۳۶	۴۵	۵۴	۶۳	۷۲	۸۱	۹۰
۱۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰

در قسمت رنگ شدهٔ جدول بالا، الگوی جالبی دیده می‌شود:

$$2 \times 6 = 12$$

$$3 \times 4 = 12$$

۲	۳
۴	۶

۲	۳
۴	۶

حاصل ضرب‌هایی که در شکل بالا مشخص شده‌اند، هردو ۱۲ هستند. پس با هم برابرند. آیا این الگو را باز هم در جدول ضرب می‌توانیم ببینیم؟
بیایید امتحان کنیم. قسمت‌های 2×2 دیگری از جدول را در نظر می‌گیریم:

×	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۲	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
۳	۳	۶	۹	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱	۲۴	۲۷	۳۰
۴	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸	۳۲	۳۶	۴۰
۵	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰
۶	۶	۱۲	۱۸	۲۴	۳۰	۳۶	۴۲	۴۸	۵۴	۶۰
۷	۷	۱۴	۲۱	۲۸	۳۵	۴۲	۴۹	۵۶	۶۳	۷۰
۸	۸	۱۶	۲۴	۳۲	۴۰	۴۸	۵۶	۶۴	۷۲	۸۰
۹	۹	۱۸	۲۷	۳۶	۴۵	۵۴	۶۳	۷۲	۸۱	۹۰
۱۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰

نکرده‌اید، خب شاید در مورد بعضی قسمت‌های 2×2 ، این الگو برقرار نباشد. «حق با شماست. باید دلیل بیاوریم. اما دلیلمان چیزی غیر از بررسی همه قسمت‌های 2×2 است. با ما همراه باشید.

دلیل برقرار بودن الگو
به این قسمت از جدول توجه کنید:

×							۸	۹
۳							۲۴	۲۷
۴							۳۲	۳۶

برقرار است؟ بله!

۶	۷
۱۲	۱۴

$$6 \times 14 = 84$$

۶	۷
۱۲	۱۴

آیا الگو در مورد قسمت

$$7 \times 12 = 84$$

۶	۷
۱۲	۱۴

برقرار است؟ بله!

۳۲	۳۶
۴۰	۴۵

$$32 \times 45 = 1440$$

۳۲	۳۶
۴۰	۴۵

آیا الگو در مورد قسمت

$$36 \times 40 = 1440$$

۳۲	۳۶
۴۰	۴۵

در هر قسمت 2×2 دیگری هم در جدول همین الگو برقرار است. حتی اگر جدول ضرب به جای 10×10 ، جدول ضرب 1000×1000 بود، باز هم همین الگو برقرار می‌بود.
شاید از ما بپرسید: «از کجا مطمئن هستید؟ مگر شما جدول ضرب 1000×1000 را رسم کرده و همه قسمت‌های 2×2 از آن را بررسی کرده‌اید؟ اگر این کار را

آیا الگو در مورد این قسمت برقرار است؟

$$24 \times 36$$

۲۴	۲۷
۳۲	۳۶

$$32 \times 27$$

۲۴	۲۷
۳۲	۳۶

آیا همین استدلال را در مورد بقیه قسمت‌های 2×2 جدول هم می‌توانیم بکنیم؟ بله! در جدول ضرب زیر، معلوم نیست که عددهای الف، ب، ج و د چه هستند. می‌خواهیم بگوییم که چرا الگو در قسمت رنگ‌شده برقرار است.

$\times$		الف	ب	
ج				
د				

بدون اینکه حاصل ضرب‌ها را حساب کنیم، می‌توانیم مطمئن باشیم حاصل‌ها برابرند! چه‌طور؟ به این ترتیب:

در جدول ضرب بالا،

- عدد ۲۷ چه‌طور ایجاد شده است؟ به این صورت: 3×9 .
- عدد ۳۲ چه‌طور ایجاد شده است؟ به این صورت: 4×8 .
- عدد ۲۴ چه‌طور ایجاد شده است؟ به این صورت: 3×8 .
- عدد ۳۶ چه‌طور ایجاد شده است؟ به این صورت: 4×9 .

پس:

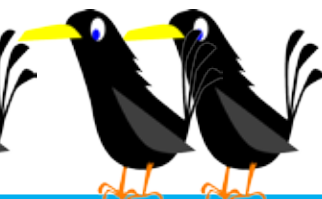
- 27×32 را به این صورت می‌توانیم بنویسیم: $3 \times 9 \times 4 \times 8$
- 24×36 را به این صورت می‌توانیم بنویسیم: $3 \times 8 \times 4 \times 9$

در خانه‌های قسمت رنگ شده، چه عددهایی باید قرار بگیرند؟ این عددها:

ب $\times$ ج	الف $\times$ ج
ب $\times$ د	الف $\times$ د

پس 27×32 برابر است با 24×36 ، زیرا هر دو از ضرب عددهای ۳، ۴، ۸ و ۹ به دست می‌آیند! فقط ترتیب ضرب کردن فرق دارد که البته در حاصل تفاوتی ایجاد نمی‌کند.

حالا حاصل ضرب‌ها را حساب می‌کنیم:



ب × د × ج × الف

الف × د × ب × ج

باز هم همین الگو برقرار است! نگاه کنید:

۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
۱۸	۲۱	۲۴	۲۷
۲۴	۲۸	۳۲	۳۶
۳۰	۳۵	۴۰	۴۵

ب×ج	الف×ج
ب×د	الف×د

ب×ج	الف×ج
ب×د	الف×د

$$۱۲ \times ۲۱ \times ۳۲ \times ۴۵ = ۳۶۲۸۸۰$$

$$۱۸ \times ۲۴ \times ۲۸ \times ۳۰ = ۳۶۲۸۸۰$$

۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
۱۸	۲۱	۲۴	۲۷
۲۴	۲۸	۳۲	۳۶
۳۰	۳۵	۴۰	۴۵

۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
۱۸	۲۱	۲۴	۲۷
۲۴	۲۸	۳۲	۳۶
۳۰	۳۵	۴۰	۴۵

باز هم، بدون اینکه لازم باشد عددها را بدانیم، مطمئن هستیم که حاصل ضرب‌ها برابرند! زیرا هر دو حاصل ضرب از ضرب عددهای الف، ب، ج و د به دست می‌آیند (البته با ترتیب متفاوت که خوش بختانه باعث نمی‌شود نتیجه فرقی بکند). پس در هر قسمت ۲×۲ از هر جدول ضربی، الگوی جالبی که دیدیم برقرار است.

مسئله: اگر قسمت‌های رنگی، ۲×۲ نباشند، بلکه ۴×۴ باشند،

توضیح دهید که چرا این الگو در هر قسمت ۴×۴ از جدول ضرب ۱۰۰۰×۱۰۰۰ هم برقرار است؟



همه چیز درباره عدد پی!

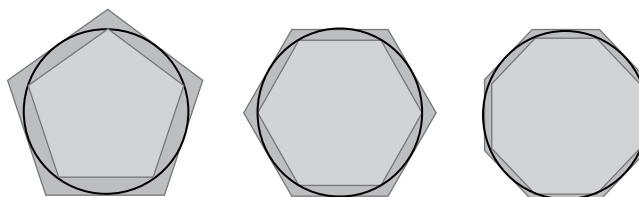


● اولین تلاش برای یافتن مقدار پی

دانشمندان بسیاری تلاش کرده‌اند ارقام بعد از ممیز عدد پی را پیدا کنند. آن‌ها روش‌های متفاوتی را به این منظور به کار برده‌اند. اولین دانشمند ارشمیدس بود. ارشمیدس دایره‌ای به قطر یک (که محیط آن می‌شود π) را در یک چندضلعی منتظم محاط کرد و برعکس یک چندضلعی منتظم را در دایره محاط کرد و نشان داد که:

محیط چندضلعی بزرگ < محیط دایره یعنی π < محیط چندضلعی کوچک

سپس نشان داد که هر چه تعداد اضلاع چندضلعی‌ها بیشتر باشد، اندازه محیط آن‌ها به محیط دایره نزدیک‌تر می‌شود.



ارشمیدس یک شش‌ضلعی منتظم بیرون و یکی هم داخل دایره قرار داد. بعد به روش‌های ریاضی محیط شش‌ضلعی‌ها را حساب کرد. محیط شش‌ضلعی بزرگ و کوچک به ترتیب شدند $۳/۱۴۲۹$ و $۳/۱۴۰۸$. بنابراین نتیجه گرفت که

$$۳/۱۴۰۸ < \pi < ۳/۱۴۲۹$$

حالا او مطمئن بود که دو رقم اول اعشار عدد پی باید ۱۴ باشد. اما از ارقام دیگر اعشار اطمینان نداشت. به این ترتیب ارشمیدس اولین گام را برای محاسبه تقریبی عدد π برداشت.

$$\pi \approx ۳/۱۴$$